2018—2019学年度福州市高三第一学期质量抽测

数学（文科）试卷参考答案及评分标准

评分说明：

1.本解答给出了一种或几种解法供参考，如果考生的解法与本解答不同，可根据试题的主要考查内容比照评分标准制定相应的评分细则.

2.对计算题，当考生的解答在某一步出现错误时，如果后续部分的解答未改变试题的内容和难度，可视影响的程度决定后继部分的给分，但不得超过该部分正确解答应给分数的一半；如果后继部分的解答有较严重的错误，就不再给分.

3.解答右端所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数.

4.只给整数分数，填空题不给中间分.

一、选择题：

1. B　2. D　3. B　4. B　5. C　6. A　7. D　8. A　9. C　10. B　11. A　12. A

二、填空题：

13. -3　14. 9　15. 64π　16. $\frac{1}{8}$

三、解答题：解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17（本小题满分12分）

（Ⅰ）解：设等差数列$\{a_n\}$的公差为d， $a_2+a_3=5$，

又 $S_5=\dfrac{5(a_1+a_5)}{2}=5a_3=15$，

∴ $a_3=3$，……………………………………………………2分

∴ $a_2=2$，∴ $a_1=d=1$，

∴ $a_n=a_1+(n-1)d=n$.……………………………………………………5分

（Ⅱ）解：由上问知$a_n=n$ ，

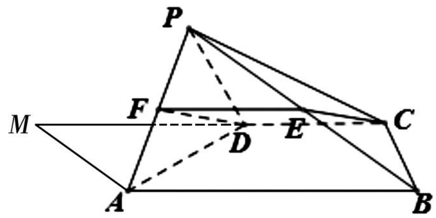
∴ $a_{2n-1}=2n-1$，$a_{2n+1}=2n+1$，……………………………………………………7分

$\therefore \dfrac{1}{a_{2n-1}a_{2n+1}}=\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1})$, ·· 10 分

$\therefore S_n=\dfrac{1}{a_1a_3}+\dfrac{1}{a_3a_5}+\cdots+\dfrac{1}{a_{2n-1}a_{2n+1}}$

$\therefore \quad =\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}\cdots+\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1})=\dfrac{1}{2}(1-\dfrac{1}{2n+1})=\dfrac{n}{2n+1}$. ·· 12 分

18.（本小题满分 12 分）



（Ⅰ）证明：取 AP 的中点 F，连结 DF,EF，如图所示.

因为点 E 是 PB 中点，

所以 $EF//AB$ 且 $EF=\dfrac{AB}{2}$. ·· 1 分

又因为四边形 $ABCM$ 是平行四边形，

所以 $AB//CD$ 且 $CD=\dfrac{AB}{2}$，

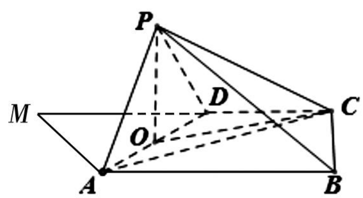
所以 $EF//CD$ 且 $EF=CD$，·· 2 分

所以四边形 $EFDC$ 为平行四边形，

所以 $CE//DF$，··· 3 分

因为 $CE\not\subset$ 平面 PAD， $DF\subset$ 平面 PAD，

所以 $CE//$ 平面 PAD. ···5 分



（Ⅱ）解：取 AD 的中点 O，连结 PO，CO，如图所示，

因为在平行四边形 $ABCM$ 中，D 为 CM 的中点，$AB=2BC$，$AD=2, AB=4$

因为 $AD=2$，所以 $PD=PA=AD=2$，··· 7 分

所以 ΔADP 为正三角形，·· 8 分

所以 $PO\perp AD$，且 $PO=\sqrt{3}$.

因为在平行四边形 $ABCM$ 中，D 为 CM 的中点，以 AD 为折痕将 $\triangle ADM$ 折起，使点 M 到达

点 P 的位置，且平面 $ABCD\perp$ 平面 PAD，……9分

所以 $PO\perp$ 平面 $ABCD$，$\angle ADC=120°$.

所以 $S_{\Delta ACD}=\frac{1}{2}\times AD\times CD\times\sin\angle ADC=\frac{1}{2}\times2\times2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$，$OC=\sqrt{7}$，……10分

$PC=\sqrt{10}$，$S_{\Delta PCD}=\frac{\sqrt{15}}{2}$，

设三棱锥 $A-PCD$ 的高为 h，

因为 $V_{A-PCD}=V_{P-ACD}$，$\frac{1}{3}S_{\Delta PCD}\cdot h=\frac{1}{3}S_{\Delta ACD}\cdot PO$，

所以 $h=\frac{S_{\Delta ACD}\cdot PO}{S_{\Delta PCD}}=\frac{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{15}}{2}}=\frac{2\sqrt{15}}{5}$，……11分

所以三棱锥 $A-PCD$ 的高为 $\frac{2\sqrt{15}}{5}$．……12分

19.（本小题满分12分）

（Ⅰ）解：由题意得 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $c=\frac{\sqrt{3}a}{2}$，$b^2=a^2-c^2=\frac{1}{4}a^2$①，……2分

又点 $(1,\frac{\sqrt{3}}{2})$ 在 E 上，所以 $\frac{1^2}{a^2}+\frac{\frac{3}{4}}{b^2}=1$②，联立①②，解得 $a=2,b=1$，

所以椭圆 E 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$．……4分

（Ⅱ）解：设点 A,B 的坐标为 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$，依题意得，

联立方程组 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+y^2=1\\ y=kx+2\end{cases}$ 消去 y，得 $(1+4k^2)x^2+16kx+12=0$．……6分

$\Delta=(16k)^2-48(1+4k^2)>0$，$k^2>\frac{3}{4}$，……7分

$x_1+x_2=\frac{-16k}{1+4k^2}$，$x_1x_2=\frac{12}{1+4k^2}$．

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2$……8分

$$=x_1x_2+(kx_1+2)(kx_2+2)$$
$$=(1+k^2)x_1x_2+2k(x_1+x_2)+4$$

$=(1+k^2).\dfrac{12}{1+4k^2}+2k.\dfrac{-16k}{1+4k^2}+4$

$=\dfrac{12-20k^2}{1+4k^2}+4$， ……………………………………………………………………10 分

$\because \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=2,$

$\therefore \dfrac{12-20k^2}{1+4k^2}+4=2$， ……………………………………………………………………10 分

$k^2=\dfrac{7}{6}>\dfrac{3}{4}$ ……………………………………………………………………11 分

所以，$k=\pm\dfrac{\sqrt{42}}{6}$． …………………………………………………………………… 12 分

20.（本小题满分 12 分）

（Ⅰ）解：依题意得，m、n 的所有情况有：{23，25}，{23，30}，{23，26}，{23，16}，{25，30)，{25，26}，{25，16}，{30，26}，{30，16}，{26，16} 共有 10 个； ……………………………2 分

设"m、n 均不小于 25"为事件 A，则事件 A 包含的基本事件有 {25，30}，{25，26}，{30，26}， ……………………………………………………………………3 分

所以 $P(\mathrm{A})=\dfrac{3}{10}$，

故事件 A 的概率为 $\dfrac{3}{10}$； ……………………………………………………………………4 分

（Ⅱ）解：（i）由数据得 $\overline{x}=12,\overline{y}=27,\sum_{i=1}^{3}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})=5,\sum_{i=1}^{3}(x_i-\overline{x})^2=2$， ………………6 分

$\hat{b}=\dfrac{\sum_{i=1}^{3}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum_{i=1}^{3}(x_i-\overline{x})^2=2}=\dfrac{5}{2},$ ……………………………………………………………………7 分

$\hat{a}=\overline{y}-\dfrac{5}{2}\overline{x}=27-\dfrac{5}{2}\times 12=-3$； ……………………………………………………………………8 分

所以 y 关于 x 的线性回归方程为 $\hat{y}=\dfrac{5}{2}x-3$． ……………………………………………………………………9 分

（ii）由（i）知，y 关于 x 的线性回归方程为 $\hat{y}=\dfrac{5}{2}x-3$．

当 $x=10$ 时，$\hat{y}=\frac{5}{2}\times 10-3=22$，$|22-23|<2$，…………………………………………………………10 分

当 $x=8$ 时，$\hat{y}=\frac{5}{2}\times 8-3=17$，$|17-16|<2$．…………………………………………………………11 分

所以，所得到的线性回归方程 $\hat{y}=\frac{5}{2}x-3$ 是可靠的．…………………………………………………12 分

（21）（本小题满分 12 分）

（Ⅰ）解：由已知得 $f(x)=\frac{e(x-1)}{e^x}$，

$\therefore f'(x)=-\frac{e\left(x-2\right)}{e^x}$ …………………………………………………………………………2 分

$\therefore f(1)=0$，又 $\because f'(1)=1$，

曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为：$y=x-1$．……………………………………………4 分

（Ⅱ）解法一：令 $g(x)=f(x)-x^2+4x-m=\left(x-1\right)e^{1-x}-x^2+4x-m$，

$\therefore g'(x)=-\left(e^{1-x}+2\right)\left(x-2\right)$，………………………………………………………………6 分

由 $g'(x)<0$ 得，$x>2$；由 $g'(x)>0$ 得，$x<2$ 易知，$x=2$ 为 $g(x)$ 极大值点，

$g(x)_{\max}=g(2)=\frac{1}{e}+4-m$ 又 $x\to-\infty$ 时 $g(x)\to-\infty$，当 $x\to+\infty$ 时，$g(x)\to-\infty$

即函数 $g(x)$ 在 $x<2$ 时有负值存在，在 $x>2$ 时也有负值存在，

由题意，只需满足 $g(x)_{\max}=\frac{1}{e}+4-m>0$，

$\therefore$m 的取值范围是：$m<\frac{1}{e}+4$．…………………………………………………………………8 分

解法二：$f'(x)=-e^{1-x}\left(x-2\right)$，………………………………………………………………………6 分

由 $f'(x)<0$ 得，$x>2$；由 $f'(x)>0$ 得，$x<2$ 易知，$x=2$ 为极大值点。

而 $y=x^2-4x+m\ \left(m\in\mathbf{R}\right)$ 在 x=2 时取得极小值，………………………………………………7 分

由题意，只需满足 $f(2)=\dfrac{1}{e}>2^2-8+m$，解得 $m<\dfrac{1}{e}+4$。……………………………………8 分

②由题意知，x_1,x_2 为函数 $g(x)=f(x)-x^2+4x-m=\left(x-1\right)e^{1-x}-x^2+4x-m$ 的两个零点，由①知，不妨设 $x_1<2<x_2$，则 $4-x_2<2$，且函数 $g(x)$ 在 $\left(-\infty,2\right)$ 上单调递增，

欲证 $x_1+x_2>4$，

只需证明 $g\left(x_1\right)>g\left(4-x_2\right)$，而 $g\left(x_1\right)=g\left(x_2\right)$，

所以，只需证明 $g\left(x_2\right)>g\left(4-x_2\right)$，……………………………………………………9 分

令 $H(x_2)=g(x_2)-g(4-x_2)\left(x_2>2\right)$，则 $H(x_2)=\left(x_2-1\right)e^{1-x_2}+\left(x_2-3\right)e^{x_2-3}$

$\therefore H'(x_2)=\left(x_2-2\right)\left(e^{x_2-3}-e^{1-x_2}\right)$，……………………………………………………10 分

$\because x_2>2$，$\therefore \dfrac{e^{x_2-3}}{e^{1-x_2}}=e^{2x_2-4}>1$，即 $e^{x_2-3}-e^{1-x_2}>0$

所以，$H'(x_2)>0$，即 $H(x_2)$ 在 $\left(2,+\infty\right)$ 上为增函数，

所以，$H(x_2)>H(2)=0$，$\therefore g\left(x_2\right)>g\left(4-x_2\right)$ 成立，………………………………11 分

所以，$x_1+x_2>4$.……………………………………………………………………………12 分

请考生在第（22）、（23）二题中任选一题做答，如果多做，则按所做的第一题计分，做答时请写清题号.

22.（本小题满分 10 分）选修 4-4：坐标系与参数方程.

（Ⅰ）证明：依题意，$\left|OA\right|=4\sin\dfrac{\pi}{6}=2$，……………………………………………………2 分

$\left|OB\right|=4\sin\dfrac{\pi}{2}=4$，$\left|OC\right|=4\sin\dfrac{5\pi}{6}=2$，

则 $\left|OA\right|+\left|OC\right|=\left|OB\right|$，……………………………………………………………………5 分

（Ⅱ）直线 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ 与圆的交点 A 的极坐标为 $\left(4\sin\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{6}\right)=\left(2,\dfrac{\pi}{6}\right)$，……………………6 分

B点的极坐标为$\left(4\sin\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)=\left(4,\frac{\pi}{2}\right)$，……………………………………………………………7 分

从而，A、B 两点的直角坐标分别为：$A\left(\sqrt{3},1\right),B\left(0,4\right)$，………………………………8 分

$\therefore$直线l的方程为：$y=-\sqrt{3}x+4$，……………………………………………………………9 分

所以，$y_0=1,\alpha=\frac{2\pi}{3}$.……………………………………………………………………………10 分

23.（本小题满分 10 分）

（Ⅰ）解：因为$f(x)=f(4-x)$，$x\in R$，

所以$f\left(x\right)$的图象关于直线$x=2$对称. ……………………………………………………2 分

又$f\left(x\right)=2\left|x+\frac{a}{2}\right|+2a$的图象关于直线$x=-\frac{a}{2}$对称，……………………………4 分

所以$-\frac{a}{2}=2$，所以，$a=-4$.…………………………………………………………………5 分

（Ⅱ）解：$\exists x\in\mathbf{R}$，使得$f\left(x\right)\le-\left|2x-1\right|+a$等价于$\exists x\in\mathbf{R}$，使得$\left|2x+a\right|+\left|2x-1\right|+2a\le0$.

等价于$\left(\left|2x+a\right|+\left|2x-1\right|+2a\right)_{\min}\le0$.

$g(x)=\left|2x+a\right|+\left|2x-1\right|+2a$，……………………………………………………………6 分

则$g(x)_{\min}=\left|\left(2x+a\right)-\left(2x-1\right)\right|+2a=\left|a+1\right|+2a$. …………………………………7 分

所以，$\left|a+1\right|+2a\le0$.

当$a\ge-1$时，$a+1+2a\le0,\therefore a\le-\frac{1}{3}$，所以，$-1\le a\le-\frac{1}{3}$；

当$a<-1$时，$-a-1+2a\le0,\therefore a\le1$，所以$a<-1$，……………………………………9 分

综上，$a\le-\frac{1}{3}$.………………………………………………………………………………10 分

（23）另解：（Ⅰ）$\because f(x)=f(4-x)$

$\therefore |2x+a|+3a=|2(4-x)+a|+3a$，…………………………………………………………2 分

$\therefore |2x+a|=|8-2x+a|$，

即 $2x+a=-\left(8-2x+a\right)$,或$2x+a=8-2x+a$（舍）…………………………………4 分

所以，$a=-4$.…………………………………………………………………………5 分

（Ⅱ）解：由 $f(x)\le -|2x-1|+a$ 得，$|2x+a|+|2x-1|\le -2a$

而$|2x+a|+|2x-1|\ge |a+1|$………………………………………………………………7 分

由题意知，只需满足$|a+1|\le -2a$，即 $2a\le a+1\le -2a$…………………………………9 分

即$\begin{cases}2a\le a+1\\ a+1\le -2a\end{cases}$，$\therefore a\le -\dfrac{1}{3}$.……………………………………………………………10 分